

Über Rückkehrsnitte auf Riemannschen
Flächen, die zu Hauptkongruenzgruppen
der Modulgruppe gehören

von

CHRISTOPH WITZGALL

Über Rückkehrsnitte auf Riemannschen Flächen
die zu Hauptkongruenzgruppen der Modulgruppe
gehören.

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Ludwig - Maximilians - Universität
München

vorgelegt

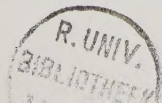
von

Christoph Witzgall

aus

Hindelang

Juni 1957



Berichterstatter: Prof.Dr.W.Maak
Tag der mündl. Prüfung: 31.7.1957

Über Rückkehrsnitte auf Riemannschen Flächen
die zu Hauptkongruenzgruppen der Modulgruppe
gehören.

Inhalt

Einleitung	1
§1. Modifiziertes Verfahren von REIDEMEISTER und SCHREIER.	3
§2. Anwendung des Verfahrens von REIDEMEISTER und SCHREIER auf $\Gamma(N)$	6
§3. Reduktionsverfahren.	9
§4. Numerische Resultate.	13
§5. Zwischenergebnisse.	15
Literaturverzeichnis.	27
Anhang.	28



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Die Modulgruppe Γ besteht aus den linearen Substitutionen

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

wo a, b, c, d ganz-rationale Zahlen sind, mit $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$. Diese Substitutionen führen die obere Halbebene in sich über. Man schreibt sie meist in der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Γ hat die Erzeugenden

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den definierenden Relationen

$$T^2 = (TU)^3 = E.$$

Die Substitutionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0$ modulo N bilden einen Normalteiler von Γ , die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$

Γ und $\Gamma(N)$ sind diskontinuierlich, d.h. sie besitzen vernünftig berandete Gebiete als Fundamentalbereiche. Klebt man die Ränder eines Fundamentalbereichs von $\Gamma(N)$ zusammen, so entsteht eine Fläche $\mathcal{F}$ mit σ Löchern und dem Geschlecht p . Die Gruppe $\Gamma(N)$ hat keine Fixpunkte im Innern der oberen Halbebene, deshalb ist $\Gamma(N)$ die Wegegruppe^{*)} von $\mathcal{F}$. Substitutionen aus $\Gamma(N)$ lassen sich daher als geschlossene Wege auf $\mathcal{F}$ deuten. Man weiß nun aus der kombinatorischen Topologie, daß die Wegegruppe einer solchen Fläche ein Erzeugendensystem

$$K_1, \dots, K_\sigma$$

(o.1)

$$a_1, \dots, a_{2p}$$

mit folgenden Eigenschaften besitzt:

- K_i bedeutet einen einmaligen Umlauf um das i -te Loch.
- Es gibt eine einzige nicht-triviale definierende Relation zwischen den Erzeugenden (o.1).

*) Modulo Homotopie.

Welche topologische Bedeutung haben die a_i ? Wenn wir jedes Loch "stopfen", so sind auf der dadurch entstehenden kompakten Fläche $\bar{f}$ die Wege K_i zusammenziehbar. Dagegen bilden die a_i eine Wegebasis der kompaktifizierten Fläche $\bar{f}$ mit der einzigen wesentlichen Relation

$$a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n} = E.$$

Diese Relation beschreibt einen zusammenziehbaren Weg, der sich aus den Wegen a_i zusammensetzt. Diese Wege zerschneiden somit $\bar{f}$ in ein einfach-zusammenhängendes Gebiet. Es ist daher berechnungsfähig, ein solches System von Wegen ein "System von Rückkehrschnitten" zu nennen. Ein kanonisches System liegt dann vor, wenn die Relation zwischen den a_i die spezielle Gestalt hat

$$\prod_{\lambda=1}^p a_{2\lambda-1} a_{2\lambda}^{-1} a_{2\lambda-1}^{-1} a_{2\lambda} = E. -$$

Wie findet man nun Substitutionen aus $\Gamma(N)$, die ein Erzeugendensystem der Gestalt (o.1) bilden?

Zunächst lassen sich die "einmaligen Umläufe um ein Loch" einfach kennzeichnen als die Gesamtheit der Substitutionen

$$A U^N A^{-1}, \quad A \in \Gamma. \quad (E.HECKE \ 5)$$

$A U^N A^{-1}$ und $B U^N B^{-1}$ umlaufen genau dann dasselbe Loch, wenn es eine Substitution $S \in \Gamma(N)$ und eine ganze Zahl k gibt so, daß

$$B = S A U^k.$$

Wir betrachten deshalb die (endliche) Modulargruppe $\Gamma/\Gamma(N)$, deren zyklische Untergruppe $\langle \rangle$ bedeute Restklassen nach $\Gamma(N)$

$$\mathcal{Z} = \{ \langle E \rangle, \langle U \rangle, \dots, \langle U \rangle^{N-1} \}$$

und eine Zerlegung von $\Gamma/\Gamma(N)$ in Rechtsnebenklassen nach

$$(o.2) \quad \Gamma/\Gamma(N) = \langle A_1 \rangle \mathcal{Z} + \langle A_2 \rangle \mathcal{Z} + \dots + \langle A_g \rangle \mathcal{Z}.$$

Unter den Substitutionen

$$K_i := A_i U^{N-1} A_i^{-1}$$

kommt genau ein Umlauf um jedes Loch vor. Um die fehlenden Erzeugenden a_i zu bestimmen, wenden wir das Verfahren von REIDEMEISTER und SCHREIER an (REIDEMEISTER [1]). Wir gewinnen mit seiner Hilfe ein System von Erzeugenden von $\Gamma(N)$, das die K_i umfaßt, und die zugehörigen definierenden Relationen. Sodann wird ein Reduktionsverfahren angegeben, das zu einem System der Gestalt (o.1) führt. (Ein anderes System von Erz. und def. Rel. von $\Gamma(N)$ ist von FRASCH [7] für prime N ebenfalls mit Hilfe des Verfahrens von REIDEMEISTER und SCHREIER angegeben worden. Es ist jedoch nicht nach topologischen Gesichtspunkten aufgebaut.) Für $\Gamma(6)$, $\Gamma(7)$, $\Gamma(8)$ wurden Rückkehrschnitte berechnet. Bei den Rückkehrschnitten für $\Gamma(6)$ und $\Gamma(7)$ fällt auf, daß sie jeweils übereinstimmende Spuren besitzen.

Das Verfahren von REIDEMEISTER und SCHREIER wurde mit einer Abänderung verwendet, die auf HECKE [5] zurückgeht und die Relationen "erster Art" (vgl. [1]) betrifft. Dabei wurde bemerkt, daß auch die Relationen "zweiter Art" vereinfacht werden können. Deshalb wollen wir das modifizierte Verfahren kurz beschreiben. Herrn Professor Wilhelm MAAK danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, seine Ratschläge und sein stetes Interesse.

§1. Modifiziertes Verfahren von REIDEMEISTER und SCHREIER.

Es sei G eine Gruppe und X eine Menge von "Symbolen". Jedes Symbol "bezeichne" jeweils ein Gruppenelement $[x] \in G$. Das "Wort"

$$(1.1) \quad \varphi = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$$

"bezeichne" das Gruppenelement

$$[\varphi] = \prod_{i=1}^n [x_i]^{\varepsilon_i}.$$

" $[\]$ " ist ein Homomorphismus der Halbgruppe der Wörter in die Gruppe G . Ist " $[\]$ " sogar ein Homomorphismus auf G , so heißt X ein System von "Erzeugenden" von G .

$\varphi^{-1} := \prod_{i=1}^{n-1} x_{n-i}^{\varepsilon_{n-i}}$ ist das zum Wort (1.1) "formalinverse". Ein Wort τ mit $[\tau] = 1$ und $\tau \neq 0$ ($0 :=$ "leeres Wort") ist eine "Relation". Die Wörter $\varphi = \varphi_1 \tau^\varepsilon \varphi_2$, $\varphi^* = \varphi_1 \varphi_2$ entstehen

auseinander durch "Abänderung" mittels W . Ist R irgendeine Menge von Relationen, so heißt κ "Folgerelation" von R , wenn sie durch endlich viele Abänderungen mittels Relationen aus R in das leere Wort übergeführt werden kann. Ist jede Relation Folgerelation von R , so ist R ein "System von definierenden Relationen". Meist rechnet man zu den definierenden Relationen nur diejenigen, die man zusätzlich zu den "trivialen" Relationen $x \in x^{-1}$ benötigt. -

Es sei U eine Untergruppe von G , X ein System von Erzeugenden x von G , R ein System von definierenden Relationen zwischen den x , $W = \{w\}$ ein Repräsentantensystem der Linksrestklassen Uw . (U selbst sei durch das Einselement e repräsentiert.) Das Symbol

$$y = (w, x) \in W \times X$$

bezeichne das Untergruppenelement

$$[y] = [(w, x)] := w[x] \overline{w[x]}^{-1}$$

($\overline{w[x]} :=$ Repräsentant von $Uw[x]$). Wir erklären eine Übersetzungsvorschrift, die jedem Wort (1.1) ein Wort

$$w(\mathcal{Y}) := \prod_{i=1}^n (w_i, x_i)^{\varepsilon_i}, \quad w_i := \begin{cases} w \prod_{k=1}^{i-1} [x_k] & \text{für } \varepsilon_i = +1 \\ w \prod_{k=1}^i [x_k] & \text{für } \varepsilon_i = -1 \end{cases}$$

zuordnet. Wir nennen $w(\mathcal{Y})$ die "Übersetzung" des Wortes $\mathcal{Y}$ bezüglich w . Jede Übersetzung des leeren Wortes sei wieder das leere Wort.

Aus dieser Definition entnimmt man mühelos:

$$\left. \begin{aligned} (1.2) \quad w(\mathcal{Y}\mathcal{U}) &= w(\mathcal{Y}) w^*(\mathcal{U}) \\ (1.3) \quad w(\mathcal{Y}^{-1}) &= w^*(\mathcal{Y}^{-1}) \\ (1.4) \quad w \cdot [\mathcal{Y}] &= [w(\mathcal{Y})] \cdot w^* \end{aligned} \right\} \quad w^* := \overline{w \cdot [\mathcal{Y}]}$$

Aus (1.4) ergibt sich für $[\mathcal{Y}] \in U$ und $w = e$: $[\mathcal{Y}] = [e(\mathcal{Y})]$. Das bedeutet, daß die $y = (w, x)$ ein System von Erzeugenden von U

bilden. Ist $\mathcal{Y}$ eine Relation, also $[\mathcal{Y}] = e$, so gilt dies nach (1.4) auch für $w(\mathcal{Y})$. Aber auch Übersetzungen von Repräsentanten sind Relationen. Ist nämlich $[\mathcal{Y}] \in W$, so folgt aus (1.4) $e \cdot [\mathcal{Y}] = [e(\mathcal{Y})] \cdot [\mathcal{Y}]$, also $[e(\mathcal{Y})] = e$.

Ist R ein System von definierenden Relationen zwischen den Erzeugenden x von G , so nennen wir sämtliche Relationen

$$w(\tau), w \in W, \tau \in R$$

"Relationen I-ter Art". Ordnen wir jedem Repräsentanten $w \in W$ ein Wort w_0 mit der Eigenschaft $[w_0] = w$ zu, so erhalten wir ein "System $\mathcal{W}$ von Repräsentantenwörtern". Die Relationen

$$e(w_0), w_0 \in \mathcal{W}$$

nennen wir "Relationen II-ter Art". Wir beweisen

Satz 1.1: Die Relationen I-ter und II-ter Art bilden ein System von definierenden Relationen zwischen den Erzeugenden y der Untergruppe U .

Beweis: Die Wörter $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Y}$ mögen durch Abänderung mittels einer Relation $\tau \in R$ auseinander hervorgehen. Aus (1.2) und (1.3) folgt dann sofort, daß die Übersetzungen $w(\mathcal{Y})$ und $w(\mathcal{Y})$ durch eine Abänderung mittels einer Relation I-ter Art auseinander hervorgehen. Mit anderen Worten: Jede Relation zwischen Erzeugenden y von U , die Übersetzung einer Relation zwischen den x ist, ist Folgerelation der Relationen I-ter Art.

Es sei

$$\mathcal{Y} = \prod_{i=1}^n (w_i, x_i)^{\varepsilon_i}$$

eine beliebige Relation zwischen den y . Wir erweitern sie mit Relationen II-ter Art zu

$$\hat{\mathcal{Y}} = \prod_{i=1}^n (e(w_0) (w_i, x_i) e(w_0^*)^{-1})^{\varepsilon_i},$$

wo $w_0, w_0^* \in \mathcal{W}$ und $[w_0] = w_i$, $w_0^* = w_i^* = \overline{w_i[x_i]}$. $\hat{\mathcal{Y}}$ ist Übersetzung des Wortes

$$\pi = \prod_{i=1}^n (w_0 x_i w_0^{*-1})^{\varepsilon_i},$$

denn nach (1.2) und (1.3) ist $e(\mathcal{V}) = \prod_{i=1}^n e(\mathcal{W}_i \ x_i \ \mathcal{W}_i^{*-1})^{\varepsilon_i} =$
 $= \prod_{i=1}^n (e(\mathcal{W}_i) (w_i, x_i) w_i^*(\mathcal{W}_i^{*-1}))^{\varepsilon_i}$ und $w_i^*(\mathcal{W}_i^{*-1}) = e(\mathcal{W}_i^*)^{-1}$. Ferner gilt

$$[\mathcal{V}] = \prod_{i=1}^n (w_i [x_i] w_i^{*-1})^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^n [(w_i, x_i)] = [\mathcal{V}] = e.$$

$\mathcal{V}$ ist also eine Relation. Da $\hat{\mathcal{V}}$ aus $\mathcal{V}$ durch Übersetzen entsteht, ist - wie oben gezeigt - $\hat{\mathcal{V}}$ Folgerelation der Relationen I-ter Art. -

Ein System $\mathcal{W}$ von Repräsentantenwörtern $\mathcal{W}$ erfüllt die

SCHREIERSCHE BEDINGUNG,

wenn mit $\mathcal{W} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} x_n^{\varepsilon_n}$ auch $\mathcal{W}' = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ zu $\mathcal{W}$ gehört.

Satz 1.2: Erfüllt ein System $\mathcal{W}$ von Repräsentantenwörtern die Schreiersche Bedingung, so bezeichnet jedes Symbol y , das in einer Relation II-ter Art auftritt, das Einselement. Das System der Relationen II-ter Art läßt sich daher ersetzen durch ein System von Relationen y , die nur aus einem Symbol bestehen.

Beweis: $e(\mathcal{W}) = e(\mathcal{W}') y$. Nun ist $[e(\mathcal{W})] = [e(\mathcal{W}')] = e$, also auch $[y] = e$. Damit ist alles bewiesen, denn jedes Symbol, das in einer Relation II-ter Art auftritt, ist (bei Gültigkeit der Schreierschen Bedingung) auch das letzte Symbol einer geeigneten Relation II-ter Art. -

§2. Anwendung des Verfahrens von REIDEMEISTER und SCHREIER auf $\Gamma(N)$

Zuerst sind die Restklassen nach $\Gamma(N)$ durch geeignete Wörter w_h zu repräsentieren. Wir knüpfen an die in der Einleitung angegebene Zerlegung (o.2) der Modulargruppe $\Gamma/\Gamma(N)$ nach der Untergruppe $\mathcal{J}$ an und sagen: die Substitutionen A, B aus Γ gehören zur selben "Nebenklasse", wenn die Restklassen $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ in derselben Rechtsnebenklasse von $\Gamma/\Gamma(N)$ nach $\mathcal{J}$ liegen. Das ist gleichbedeutend damit, daß $A U_A^{-1}$ und $B U_B^{-1}$ um dasselbe Loch umlaufen (vgl. Einleitung), und damit, daß die "rationalen Spitzen" $A(\infty), B(\infty)$ äquivalent modulo $\Gamma(N)$ sind.

Die Substitutionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$ gehören genau dann zur selben Nebenklasse, wenn

$$\begin{array}{lcl} a = a^* & \text{bzw.} & a = -a^* \\ c = c^* & & c = -c^* \end{array} \quad \text{modulo } N.$$

Bilden die Substitutionen $A_1=E, A_2, \dots, A_\delta$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen, so bilden die Substitutionen M_h

$$\begin{array}{lll} M_1 = A_1 = E, & M_2 = U, \dots & M_N = U^{N-1} \\ (2.2) \quad M_{N+1} = A_2, & M_{N+2} = A_2 U, \dots & M_{2N} = A_2 U^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{(\delta-1)N+1} = A_\delta, & M_{(\delta-1)N+2} = A_\delta U, \dots, & M_{\delta N} = A_\delta U^{N-1} \end{array}$$

ein Repräsentantensystem der Restklassen nach $\Gamma(N)$. (HECKE [5]) Wir werden zeigen, daß man Wörter $u_i, [u_i] = A_i$ finden kann, die eingesetzt in (2.2) Schreiersche Repräsentanten liefern. Hierzu betrachten wir "normale" Wörter

$$u = U^{k_0} T U^{k_1} T U^{k_2} \dots U^{k_{n-1}} T$$

wo $0 \leq k_0 < N, 0 < k_v < N$. Unter "Länge" eines normalen Wortes verstehen wir die Anzahl seiner Faktoren $U^k T$. W.v.DYCK [4] hat gezeigt, daß zu jeder Nebenklasse ein normales Wort gehört, dessen Länge nicht größer als 3 ist. Wir repräsentieren nun jede Nebenklasse durch kürzeste normale Wörter u_i . Das System dieser Wörter u_i soll ferner die folgende Eigenschaft besitzen:

$$\begin{array}{ll} \text{mit} & u_i = U^{k_0} T U^{k_1} \dots U^{k_{n-1}} T U^{k_n} T \\ (2.3) \quad \text{ist auch das Wort} & \\ & u_j = U^{k_0} T U^{k_1} \dots U^{k_{n-1}} T \\ & \text{das aus } u_i \text{ durch Streichen der letzten} \\ & \text{Silbe entsteht, ein Wort des Systems.} \end{array}$$

Setzt man Wörter mit der Eigenschaft (2.3) in (2.2) ein, so erhält man ein "normales" System von Repräsentantenwörtern. Es erfüllt natürlich die Schreiersche Bedingung.

Folgende Anweisung gestattet es, ein normales System von Repräsentantenwörtern aufzufinden. Man verschafft sich Überblick

über alle Nebenklassen, indem man alle modulo N verschiedenen ersten Spalten von Substitutionen aus Γ bestimmt. Man setzt dann $\mathcal{U}_1 := 0$, $\mathcal{U}_2 := T$, $\mathcal{U}_3 := UT$, $\dots$, $\mathcal{U}_{N+1} := U^{N-1}T$. Unter den Wörtern der Gestalt $U^k T U^l T$ mit $0 \leq k < N$, $1 < l < N-1$ sind alle kürzesten normalen Wörter aus Nebenklassen der Länge 2 enthalten. Wir berechnen der Reihe nach sämtliche dieser Wörter und stellen an Hand der ersten Spalte jeweils fest, ob es zu einer Nebenklasse gehört, die bereits durch ein anderes Wort repräsentiert ist. Bleiben noch die Nebenklassen mit einem kürzesten normalen Wort $U^k T U^l T U^m T$. Das Wort $U^k T U^l T$ gehört zu einer Nebenklasse, die bereits durch $U^s T U^t T$ repräsentiert ist, also: $\langle U^k T U^l T \rangle = \langle U^s T U^t T U^r \rangle$ und $\langle U^k T U^l T U^m T \rangle = \langle U^s T U^t T U^{r+m} T \rangle = \langle U^s T U^t T U^{\bar{r}+\bar{m}} T \rangle$, wo $\bar{r}+\bar{m}$, $0 < \bar{r}+\bar{m} < N$ der Rest von $r+m$ modulo N . Auf der Suche nach geeigneten Repräsentanten für die restlichen Nebenklassen kann man sich also auf solche Wörter $U^k T U^l T U^m T$ beschränken, bei denen $U^k T U^l T$ bereits unter den $\mathcal{U}_i$ vorkommt. -

Wir legen ein normales Repräsentantensystem zu Grunde und wenden das Verfahren von REIDEMEISTER-SCHREIER an. Als Erzeugende von $\Gamma(N)$ erhalten wir die Symbole (vgl. §1)

$$(M_h, U), (M_h, T) \quad h = 1, \dots, \mu(N).$$

Wir schreiben nun

$$H_h \text{ statt } (M_h, U) \quad L_h \text{ statt } (M_h, T)$$

H_h, L_h bezeichnen Substitutionen, die durch die Beziehungen *)

$$M_h U = [H_h] M_{f(h)} \quad M_h T = [L_h] M_{g(h)}$$

festgelegt sind, wobei

$$(2.4) \quad M_{f(h)} := \overline{M_h U} \quad M_{g(h)} := \overline{M_h T}.$$

Durch (2.4) werden Permutationen

$$f, g$$

der Indizes $h = 1, \dots, \mu(N)$ erklärt.

*) T und U bezeichnen verschiedene Gruppenelemente; deshalb: muß man Symbole und Gruppenelemente $[T], [U]$ nicht unterscheiden.

(2.5) Hilfsatz: Die Indizes

$$h, h_2=g(h), h_3=fg(h), h_4=gfg(h), h_5=fgfg(h), h_6=gfgfg(h)$$

sind paarweise verschieden.

Beweis: Es ist nur $h = h_i, i=2, \dots, 6$, zu zeigen. Aus $h = h_1$ würde folgen $M_h T = [L_h] M_h$, also $T \in \Gamma(N)$. Widerspruch! Entsprechend beweist man den Rest.

Satz 2.1: Zwischen den Erzeugenden H_h, L_h bestehen die definierenden Relationen

$$L_h L_g(h) \quad h < g(h)$$

$$L_h H_g(h) L_{fg(h)} H_{gfg(h)} L_{fgfg(h)} H_{gfgfg(h)}, \quad h < \min(fg(h), fgfg(h))$$

$$H_h \quad h \text{ kein Vielfaches von } N$$

$$L_h \text{ und } L_{g(h)} \quad h = \varphi N + 1, \quad 0 < \varphi \leq 6$$

(Hinsichtlich der Relationen I-ter Art vgl. E.HECKE [5])

§3. Reduktionsverfahren.

Die Menge der Relationen

$$L_h H_g(h) L_{fg(h)} H_{gfg(h)} L_{fgfg(h)} H_{gfgfg(h)}, \quad h < \min(fg(h), fgfg(h))$$

nennen wir

$\mathcal{R}$.

1.Reduktionsschritt: Weglassen der Erzeugenden, die nach Satz 2.1 das Einselement bezeichnen.- Von den Erzeugenden H_h bleiben nur die H_{iN} übrig. Wir schreiben

$$K_i := H_{iN}.$$

Es gilt $[K_i] = A_i U^N A_i^{-1}$. Die K_i sind also die Umläufe um Löcher. (vgl. Einleitung)

Ist τ eine Relation aus $\mathcal{R}$, so bedeute $\hat{\tau}$ die Relation, die

aus $\mathcal{R}$ beim ersten Reduktionsschritt entsteht.

- (3.1) Hilfsatz: a) Jede Relation $\hat{\mathcal{R}}$ enthält noch mindestens ein Symbol L_h .
 b) Jede Relation $\hat{\mathcal{R}}$ besteht aus höchstens drei Symbolen.

Beweis: $h, fg(h), fgfg(h)$ sind nicht gleichzeitig kongruent 1 modulo N . Sonst würde nämlich eines der u_i ein Teilwort $U^{N-1}T U^{N-1}$ enthalten, und wäre infolgedessen kein kürzestes normales Wort seiner Nebenklasse. Das gleiche gilt für die Indizes $g(h), gfg(h), gfgfg(h)$.

Wir nehmen nun an, es gäbe ein h derart, daß alle 3 Symbole $L_h, L_{fg(h)}, L_{fgfg(h)}$ bei der Reduktion wegzulassen sind. Ferner sei $h \neq 1$ modulo N , also $g(h) \neq 1$ modulo N . Daraus folgt $fg(h) \neq 1$ modulo N , daraus wiederum $gfg(h) \neq 1$ modulo N , und schließlich $gfgfg(h) \neq 1$ modulo N . Widerspruch! Wäre $h \equiv 1$, so ist $fg(h) \neq 1$ oder $fgfg(h) \neq 1$ modulo N , und man kann analog schließen. Damit ist a) bewiesen.

$H_{g(h)}$ nicht wegzulassen $\rangle g(h) = kN \rangle fg(h) = (k-1)N + 1 \rangle$
 $\rangle L_{fg(h)}$ wegzulassen. Wenn also in einer Relation $\mathcal{R}$ ein Symbol H stehen bleibt, so ist das darauffolgende Symbol L wegzulassen. -

2.Reduktionsschritt: Ersetzen der Erzeugenden L_h mit $h > g(h)$ durch $L_{g(h)}^{-1}$. Dadurch entsteht aus $\hat{\mathcal{R}}$ die Relation $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$.

- (3.2) Hilfsatz: a) In keiner Relation $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$ kommt das gleiche Symbol zweimal vor.
 b) Jedes übriggebliebene Symbol L_h ($h < g(h)$) ist in genau zwei Relationen aus $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$ enthalten.

Beweis: a) folgt aus Hilfsatz (2.5). b) ist trivial. -

3.Reduktionsschritt: Die in den Hilfsätzen (3.1) und (3.2) formulierten Tatsachen ermöglichen folgendes Reduktionsverfahren: Beginnend mit der ersten Relation ($h = 1$) aus $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$,

$$L_{N+2} K_{N+1} K_1, '$$

werden die L_h durch die K_k ausgedrückt. Das ist solange

möglich, als es Relationen gibt, in denen zwei der drei Symbole bereits durch die K_k ausgedrückt sind. -

Satz 3.1: Nach Beendigung des 3.Reduktionsschrittes sind alle Symbole L_h , deren entsprechende Wege auf der kompaktifizierten Fläche $\hat{\mathcal{F}}$ zusammenziehbar sind, durch Symbole K_i ausgedrückt.

Beweis wird nachgeholt. -

4.Reduktionsschritt: Eines der noch nicht eliminierten Symbole L_h setzen wir gleich

$$a_1$$

und drücken von nun an die L_h nach Möglichkeit durch die K_k und a_1 aus. Ebenso führen wir a_2 ein u.s.w. Das Reduktionsverfahren bricht ab, wenn alle L_h eliminiert oder umbenannt sind. -

Wird während des 3. oder 4.Reduktionsschrittes das Symbol L_h eliminiert (bzw. umbenannt), so gibt es genau eine noch unverbrauchte Relation $\hat{r}$, in der L_h noch einmal vorkommt und durch ein Wort $\mathcal{V}(K_k, a_i)$ ersetzt werden muß. Wenn nun in dieser Relation $\hat{r}$ die anderen Symbole bereits vorher durch die K_k, a_i ausgedrückt worden waren, so nennen wir $\hat{r}$ eine "Endrelation". Eine Endrelation liefert keine neue Elimination.

Satz 3.2: In unserem Reduktionsprozess tritt genau einmal eine Endrelation auf.

Beweis: Wenn die Elimination eines Symbols L_h nicht auf eine Endrelation führt, so gibt es zwei weitere noch unverbrauchte Relationen $\hat{r}_1, \hat{r}_2$, die ein noch nicht eliminiertes Symbol L_h gemeinsam haben. Der Eliminationsprozess geht also weiter, und zwar mit beiden Phasen: Eliminieren aus $\hat{r}_1$ und Einsetzen in $\hat{r}_2$. Da das Reduktionsverfahren abbricht, muß eine Endrelation auftreten.

Zu zeigen bleibt, daß nur eine Endrelation auftreten kann. Wir nennen zwei Relationen $\hat{r}_i$ und $\hat{r}_j$ "benachbart", wenn $\hat{r}_i$ und $\hat{r}_j$ ein Symbol L_h gemeinsam haben. $\hat{r}_i$ und $\hat{r}_j$ sollen "verkettet" heißen, wenn es eine Kette von paarweise benachbarten Relationen gibt die $\hat{r}_i$ mit $\hat{r}_j$ verbindet. Wir behaupten, daß alle Relationen

aus $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$ miteinander verkettet sind. Das ist offensichtlich damit gleichbedeutend, daß nur eine Endrelation vorhanden ist. "Verkettet sein" ist eine Äquivalenzrelation, erzeugt also eine Klasseneinteilung in $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$. Denn nach Hilfsatz (2.5) ist jedem Index h genau eine Relation $\tau \in \mathcal{R}$ zugeordnet, in der das Symbol L_h auftritt. Ist $\hat{\mathcal{W}}$ eine Klasse verketteter Relationen aus $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$, so ist ihm die Menge $\mathcal{W} := \{\tau: \tau \in \mathcal{R} \text{ und } \hat{\tau} \in \hat{\mathcal{W}}\}$ und schließlich die Klasse von Indizes

$$\mathcal{V}_g := \{h: L_h \text{ kommt in einer Relation } \tau \in \mathcal{W} \text{ vor}\}$$

zugeordnet. Es gilt $g(\mathcal{V}_g) = \mathcal{V}_g$ und $fg(\mathcal{V}_g) = \mathcal{V}_g$. Weil aber g und fg eine transitive Permutationsdarstellung (nämlich die reguläre) der Modulargruppe erzeugen, umfaßt $\mathcal{V}_g$ sämtliche Indizes. q.e.d.-

Da wir wissen, daß nur eine Endrelation auftritt, können wir die Anzahl der eingeführten Symbole a_1 leicht abzählen. Sie ergibt sich zu

$$\frac{1}{2}\mu - \delta + 2.$$

Bekanntlich (KLEIN-FRICKE [3]) ist dies das doppelte Geschlecht $2p$ von $\mathcal{F}$. Die Endrelation liefert die einzige Relation zwischen den K_k und a_i . Man hat also

Satz 3.3: Das Reduktionsverfahren liefert das System von Erzeugenden

$$K_1, \dots, K$$

$$a_1, \dots, a_{2p}.$$

Neben den trivialen Relationen besteht eine einzige definierende Relation.

Die K_k bedeuten Umläufe um Löcher der Fläche $\mathcal{F}$. Die a_i bilden ein System von Rückkehrschnitten.

Nun läßt sich der Beweis von Satz 3.1 nachholen: Kein a_i ist auf der kompakten Fläche $\bar{\mathcal{F}}$ zusammenziehbar; sonst wäre das Geschlecht kleiner als p . Jedes nach dem 3.Reduktionsschritt übriggebliebene L_h kann aber zu Beginn des 4.Reduktionsschrittes als a_1 gewählt werden. -

§4. Numerische Resultate.

Reckenrechnitte für $\Gamma(6)$: (Geschlecht $p = 1$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 31, & 18 \\ 12, & 7 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -11, & 30 \\ -18, & 49 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 19, & -12 \\ -30, & 19 \end{pmatrix}$$

Relationen:

$$A_3 A_2 A_1 = E$$

$$A_1 K_2 K_3 K_{10} K_2 A_2 K_5 K_6 K_7 K_1 A_3 K_{11} K_{12} K_3 K_4 = E$$

Reckenrechnitte für $\Gamma(7)$: (Geschlecht $p = 3$)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 132, & 35 \\ 49, & 13 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 181, & -133 \\ 49, & -36 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 132, & 49 \\ 35, & 13 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 230, & -399 \\ 49, & -85 \end{pmatrix} \quad a_5 = \begin{pmatrix} 167, & -105 \\ 35, & -22 \end{pmatrix} \quad a_6 = \begin{pmatrix} 279, & -763 \\ 49, & -134 \end{pmatrix}$$

$$a_7 = \begin{pmatrix} 202, & -329 \\ 35, & -57 \end{pmatrix}$$

Relationen:

$$K_{16} a_4^{-1} a_5 K_{13} a_2^{-1} a_3 K_{24} K_{10} a_1^{-1} a_6^{-1} a_7 = E$$

$$a_7^{-1} K_8 K_1 K_{23} K_9 a_3^{-1} K_{21} K_6 a_4 K_{17} K_{18} K_4 a_1 K_{11} K_{12} K_2 a_5^{-1} K_{22} K_7 \\ a_6 K_{19} K_{20} K_5 a_2 K_{14} K_{15} K_3 = E$$

Rückkehrschnitte für $\Gamma(8)$: (Geschlecht $p = 5$)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 57, & 16 \\ 32, & 9 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 89, -64 \\ -32, -23 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} -159, -88 \\ -56, -31 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 241, & 64 \\ 64, & 17 \end{pmatrix} \quad a_5 = \begin{pmatrix} 553, & 96 \\ 144, & 25 \end{pmatrix} \quad a_6 = \begin{pmatrix} 305, -224 \\ 64, & -47 \end{pmatrix}$$

$$a_7 = \begin{pmatrix} 697, -576 \\ 144, -119 \end{pmatrix} \quad a_8 = \begin{pmatrix} -183, -40 \\ -32, -7 \end{pmatrix} \quad a_9 = \begin{pmatrix} 841, -1536 \\ 144, -263 \end{pmatrix}$$

$$a_{10} = \begin{pmatrix} -215, & 168 \\ -32, & 25 \end{pmatrix} \quad a_{11} = \begin{pmatrix} 81, & -64 \\ -224, & 177 \end{pmatrix} \quad a_{12} = \begin{pmatrix} 33, -152 \\ -160, & 737 \end{pmatrix}$$

Relationen:

$$K_{11} a_1^{-1} a_9^{-1} K_8 a_{10} a_{11}^{-1} = E$$

$$K_{13} a_5^{-1} K_6 a_{12}^{-1} = E$$

$$K_{22} a_4 K_{12} a_8^{-1} a_9 K_{20} K_4 K_{21} a_2 a_6^{-1} a_7 K_{18} K_3 K_{19} a_1 a_4^{-1} a_5 K_{14} K_2 K_{15} a_2^{-1} a_3 K_{10} K_{24} a_{11} K_{17} a_7^{-1} K_7 a_8 a_{12} K_{23} a_6 K_{16} a_{10}^{-1} K_9 K_1 a_3^{-1} K_5 = E$$

§ 5. Zwischenergebnisse

Bei der Bestimmung der in §4 angegebenen Rückkehrschnitte fallen folgende Zwischenergebnisse an, die Interesse verdienen:

- 1) Die Elemente der Modulargruppen $\mathcal{M}(N) = \Gamma/\Gamma(N)$ in Gestalt von Restklassenmatrizen. (Tabellen A6, A7, A8). Wir schreiben sie derart an, daß die Elemente der zyklischen Gruppe $\mathcal{Z}(N)$ (vgl. Einleitung Seite 2) in der obersten Zeile stehen, während die übrigen Zeilen jeweils aus entsprechenden Elementen der Nebenklassen von $\mathcal{M}(N)$ nach $\mathcal{Z}(N)$ bestehen. (vgl. (2.2)). Da die erste Spalte der Restklassenmatrizen innerhalb einer Nebenklasse jeweils übereinstimmt, schreiben wir sie nur einmal, und zwar an allererster Stelle vor dem Repräsentanten $\mathcal{M}_i(T, U)$ der Nebenklassen.
- 2) Die Permutation g (vgl. (2.4)) (Tabellen B6, B7, B8)
- 3) Die Relationen $\mathcal{R}$ und $\hat{\mathcal{R}}$ (vgl. §3) (Tabellen C6, C7, C8)

Tabelle B6

(1, 7)	(2, 13)	(3, 19)	(4, 25)	(5, 31)	(6, 37)
	(8, 42)	(9, 43)	(10, 49)	(11, 55)	(12, 14)
		(15, 60)	(16, 61)	(17, 67)	(18, 20)
		(21, 72)	(22, 51)	(23, 47)	(24, 26)
		(27, 46)	(28, 63)	(29, 48)	(30, 32)
		(33, 57)	(34, 53)	(35, 70)	(36, 38)
		(39, 69)	(40, 65)	(41, 44)	
		(45, 64)			(48, 50)
			(52, 71)		(54, 56)
				(59, 62)	
					(66, 68)

Tabelle A6

1 0	E	:	0 1	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	(1, 2, 3, 4, 5, 6)
0 1	T	:	5 0	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	(7, 8, 9, 10, 11, 12)
1 1	UT	:	5 0	0 1	1 2	2 3	3 4	4 5	(13, 14, 15, 16, 17, 18)
2 1	U ² T	:	5 0	1 1	3 2	5 3	1 4	3 5	(19, 20, 21, 22, 23, 24)
3 1	U ³ T	:	5 0	2 1	5 2	2 3	5 4	2 5	(25, 26, 27, 28, 29, 30)
4 1	U ⁴ T	:	5 0	3 1	1 2	5 3	3 4	1 5	(31, 32, 33, 34, 35, 36)
5 1	U ⁵ T	:	5 0	4 1	3 2	2 3	1 4	0 5	(37, 38, 39, 40, 41, 42)
5 2	TU ² T	:	0 5	5 1	4 3	3 5	2 1	1 3	(43, 44, 45, 46, 47, 48)
5 3	TU ³ T	:	0 5	5 2	4 5	3 2	2 5	1 2	(49, 50, 51, 52, 53, 54)
5 4	TU ⁴ T	:	0 5	5 3	4 1	3 5	2 3	1 1	(55, 56, 57, 58, 59, 60)
4 3	UTU ³ T	:	1 1	5 4	3 1	1 4	5 1	3 4	(61, 62, 63, 64, 65, 66)
3 2	UTU ⁴ T	:	1 1	4 3	1 5	4 1	1 3	4 5	(67, 68, 69, 70, 71, 72)

1, 7; 8, 42; 37, 6;	$L_8 K_7 K_1$
2, 13; 14, 12; 7, 1;	$L_{12}^{-1} K_2$
3, 19; 20, 18; 13, 2;	$L_{18}^{-1} K_3$
4, 25; 26, 24; 19, 3;	$L_{24}^{-1} K_4$
5, 31; 32, 30; 25, 4;	$L_{30}^{-1} K_5$
6, 37; 38, 36; 31, 5;	$L_{36}^{-1} K_6$
9, 43; 44, 41; 42, 8;	$L_{41}^{-1} L_8^{-1}$
10, 49; 50, 48; 43, 9;	$L_{48}^{-1} K_8$
11, 55; 56, 54; 49, 10;	$L_{54}^{-1} K_9$
12, 14; 15, 60; 55, 11;	$L_{12} L_{15} K_{10}$
16, 61; 62, 59; 60, 15;	$L_{59}^{-1} L_{15}^{-1}$
17, 67; 68, 66; 61, 16;	$L_{66}^{-1} K_{11}$
18, 20; 21, 72; 67, 17;	$L_{18} L_{21} K_{12}$
22, 51; 52, 71; 72, 21;	$L_{22} L_{52} L_{21}^{-1}$
23, 47; 48, 50; 51, 22;	$L_{23} L_{48} L_{22}^{-1}$
24, 26; 27, 46; 47, 23;	$L_{24} L_{27} L_{23}^{-1}$
28, 63; 64, 45; 46, 27;	$L_{28} L_{45}^{-1} L_{27}^{-1}$
29, 58; 59, 62; 63, 28;	$L_{29} L_{59} L_{28}^{-1}$
30, 32; 33, 57; 58, 29;	$L_{30} L_{33} L_{29}^{-1}$
34, 53; 54, 56; 57, 33;	$L_{34} L_{54} L_{33}^{-1}$
35, 70; 71, 52; 53, 34;	$L_{35} L_{52}^{-1} L_{34}^{-1}$
36, 38; 39, 69; 70, 35;	$L_{36} L_{39} L_{35}^{-1}$
40, 65; 66, 68; 69, 39;	$L_{40} L_{66} L_{39}^{-1}$
41, 44; 45, 64; 65, 40;	$L_{41} L_{45} L_{40}^{-1}$

1 0	E	0 1	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	(1, , 7)
0 1	T	6 0	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6	(8, , 14)
1 1	UT	6 0	0 1	1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	(15, , 21)
2 1	U ² T	6 0	1 1	3 2	5 3	0 4	2 5	4 6	(22, , 28)
3 1	U ³ T	6 0	2 1	5 2	1 3	4 4	0 5	3 6	(29, , 35)
4 1	U ⁴ T	6 0	3 1	0 2	4 3	1 4	5 5	2 6	(36, , 42)
5 1	U ⁵ T	6 0	4 1	2 2	0 3	5 4	3 5	1 6	(43, , 49)
6 1	U ⁶ T	6 0	5 1	4 2	3 3	2 4	1 5	0 6	(50, , 56)
6 2	TU ² T	0 6	6 1	5 3	4 5	3 0	2 2	1 4	(57, , 63)
6 3	TU ³ T	0 6	6 2	5 5	4 1	3 4	2 0	1 3	(64, , 70)
6 4	TU ⁴ T	0 6	6 3	5 0	4 4	3 1	2 5	1 2	(71, , 77)
6 5	TU ⁵ T	0 6	6 4	5 2	4 0	3 5	2 3	1 1	(78, , 84)
5 4	UTU ³ T	1 1	6 5	4 2	2 6	0 3	5 0	3 4	(85, , 91)
4 3	UTU ⁴ T	1 1	5 4	2 0	6 3	3 6	0 2	4 5	(92, , 98)
3 2	UTU ⁵ T	1 1	4 3	0 5	3 0	6 2	2 4	5 6	(99, , 105)
5 3	U ² TU ³ T	5 6	3 2	1 5	6 1	4 4	2 0	0 3	(106, , 112)
0 3	U ² TU ⁴ T	2 1	2 4	2 0	2 3	2 6	2 2	2 5	(113, , 119)
5 2	U ² TU ⁵ T	2 1	0 3	5 5	3 0	1 2	6 4	4 6	(120, , 126)
3 3	U ³ TU ⁴ T	3 1	6 4	2 0	5 3	1 6	4 2	0 5	(127, , 133)
0 2	U ³ TU ⁵ T	3 1	3 3	3 5	3 0	3 2	3 4	3 6	(134, , 140)
2 2	U ⁴ TU ⁵ T	4 1	6 3	1 5	3 0	5 2	0 4	2 6	(141, , 147)
4 2	U ⁵ TU ⁵ T	5 1	2 3	6 5	3 0	0 2	4 4	1 6	(148, , 154)
3 0	TU ² TU ⁴ T	1 5	4 5	0 5	3 5	6 5	2 5	5 5	(155, , 161)
2 0	TU ³ TU ⁵ T	1 4	3 4	5 4	0 4	2 4	4 4	6 4	(162, , 168)

Tabelle B7

8)	(2, 15)	(3, 22)	(4, 29)	(5, 36)	(6, 43)	(7, 50)
	(9, 56)	(10, 57)	(11, 64)	(12, 71)	(13, 78)	(14, 16)
		(17, 84)	(18, 85)	(19, 92)	(20, 99)	(21, 23)
		(24, 105)	(25, 106)	(26, 113)	(27, 120)	(28, 30)
		(31, 126)	(32, 75)	(33, 127)	(34, 134)	(35, 37)
		(38, 140)	(39, 96)	(40, 67)	(41, 141)	(42, 44)
		(45, 147)	(46, 117)	(47, 88)	(48, 148)	(49, 51)
		(52, 154)	(53, 131)	(54, 109)	(55, 58)	
		(59, 108)	(60, 103)	(61, 155)	(62, 143)	(63, 65)
		(66, 142)		(68, 95)	(69, 162)	(70, 72)
		(73, 168)	(74, 128)		(76, 125)	(77, 79)
		(80, 124)	(81, 159)	(82, 150)	(83, 86)	
		(87, 149)		(89, 116)	(90, 164)	(91, 93)
		(94, 163)			(97, 139)	(98, 100)
		(101, 138)	(102, 156)		(104, 107)	
				(110, 130)	(111, 166)	(112, 114)
		(115, 165)			(118, 146)	(119, 121)
		(122, 145)	(123, 160)			
		(129, 167)			(132, 153)	(133, 135)
		(136, 152)	(137, 157)			
			(144, 161)			
			(151, 158)			

Tabelle C7

(1, 8) (9, 56) (50, 7)	L_9 K_8 K_1
(2, 15) (16, 14) (8, 1)	L_{14}^{-1} K_2
(3, 22) (23, 21) (15, 2)	L_{21}^{-1} K_3
(4, 29) (30, 28) (22, 3)	L_{28}^{-1} K_4
(5, 36) (37, 35) (29, 4)	L_{35}^{-1} K_5
(6, 43) (44, 42) (36, 5)	L_{42}^{-1} K_6
(7, 50) (51, 49) (43, 6)	L_{49}^{-1} K_7
(10, 57) (58, 55) (56, 9)	L_{55}^{-1} L_9^{-1}
(11, 64) (65, 63) (57, 10)	L_{63}^{-1} K_9
(12, 71) (72, 70) (64, 11)	L_{70}^{-1} K_{10}
(13, 78) (79, 77) (71, 12)	L_{77}^{-1} K_{11}
(14, 16) (17, 84) (78, 13)	L_{14} L_{17} K_{12}
(18, 85) (86, 83) (84, 17)	L_{83}^{-1} L_{17}^{-1}
(19, 92) (93, 91) (85, 18)	L_{91}^{-1} K_{13}
(20, 99) (100, 98) (92, 19)	L_{98}^{-1} K_{14}
(21, 23) (24, 105) (99, 20)	L_{21} L_{24} K_{15}
(25, 106) (107, 104) (105, 24)	L_{104}^{-1} L_{24}^{-1}
(26, 113) (114, 112) (106, 25)	L_{112}^{-1} K_{16}
(27, 120) (121, 119) (113, 26)	L_{119}^{-1} K_{17}
(28, 30) (31, 126) (120, 27)	L_{28} L_{31} K_{18}
(32, 75) (76, 125) (126, 31)	L_{32} L_{76} L_{31}^{-1}
(33, 127) (128, 74) (75, 32)	L_{74}^{-1} L_{32}^{-1}
(34, 134) (135, 133) (127, 33)	L_{133}^{-1} K_{19}
(35, 37) (38, 140) (134, 34)	L_{35} L_{38} K_{20}
(39, 96) (97, 139) (140, 38)	L_{39} L_{97} L_{38}^{-1}
(40, 67) (68, 95) (96, 39)	L_{40} L_{68} L_{39}^{-1}
(41, 141) (142, 66) (67, 40)	L_{66}^{-1} L_{40}^{-1}
(42, 44) (45, 147) (141, 41)	L_{42} L_{45} K_{21}

(46,117) (118,146) (147, 45)	$L_{46} L_{118} L_{45}^{-1}$
(47, 88) (89,116) (117, 46)	$L_{47} L_{89} L_{46}^{-1}$
(48,148) (149, 87) (88, 47)	$L_{87}^{-1} L_{47}^{-1}$
(49, 51) (52,154) (148, 48)	$L_{49} L_{52} K_{32}$
(53,131) (132,153) (154, 52)	$L_{53} L_{132} L_{52}^{-1}$
(54,109) (110,130) (131, 53)	$L_{54} L_{110} L_{53}^{-1}$
(55, 58) (59,108) (109, 54)	$L_{55} L_{59} L_{54}^{-1}$
(60,103) (104,107) (108, 59)	$L_{60} L_{104} L_{59}^{-1}$
(61,155) (156,102) (103, 60)	$L_{102}^{-1} L_{60}^{-1}$
(62,143) (144,161) (155, 61)	$L_{62} L_{144} K_{23}$
(63, 65) (66,142) (143, 62)	$L_{63} L_{66} L_{62}^{-1}$
(69,162) (163, 94) (95, 68)	$L_{94}^{-1} L_{68}^{-1}$
(70, 72) (73,168) (162, 69)	$L_{70} L_{73} K_{24}$
(74,128) (129,167) (168, 73)	$L_{74} L_{129} L_{73}^{-1}$
(77, 79) (80,124) (125, 76)	$L_{77} L_{80} L_{76}^{-1}$
(81,159) (160,123) (124, 80)	$L_{81} L_{123}^{-1} L_{80}^{-1}$
(82,150) (151,158) (159, 81)	$L_{82} L_{151} L_{81}^{-1}$
(83, 86) (87,149) (150, 82)	$L_{83} L_{87} L_{82}^{-1}$
(90,164) (165,115) (116, 89)	$L_{90} L_{115}^{-1} L_{89}^{-1}$
(91, 93) (94,163) (164, 90)	$L_{91} L_{94} L_{90}^{-1}$
(98,100) (101,138) (139, 97)	$L_{98} L_{101} L_{97}^{-1}$
(102,156) (157,137) (138,101)	$L_{102} L_{137}^{-1} L_{101}^{-1}$
(111,166) (167,129) (130,110)	$L_{111} L_{129}^{-1} L_{110}^{-1}$
(112,114) (115,165) (166,111)	$L_{112} L_{115} L_{111}^{-1}$
(119,121) (122,145) (146,118)	$L_{119} L_{122} L_{118}^{-1}$
(123,160) (161,144) (145,122)	$L_{123} L_{144}^{-1} L_{122}^{-1}$
(133,135) (136,152) (153,132)	$L_{133} L_{136} L_{132}^{-1}$
(137,157) (158,151) (152,136)	$L_{137} L_{151}^{-1} L_{136}^{-1}$

1 0	E	0 1	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	7 1	(1,	, 8)
0 1	T	7 0	7 1	7 2	7 3	7 4	7 5	7 6	7 7	(9,	, 16)
1 1	UT	7 0	0 1	1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	6 7	(17,	, 24)
2 1	U ² T	7 0	1 1	3 2	5 3	7 4	1 5	3 6	5 7	(25,	, 32)
3 1	U ³ T	7 0	2 1	5 2	0 3	3 4	6 5	1 6	4 7	(33,	, 40)
4 1	U ⁴ T	7 0	3 1	7 2	3 3	7 4	3 5	7 6	3 7	(41,	, 48)
5 1	U ⁵ T	7 0	4 1	1 2	6 3	3 4	0 5	5 6	2 7	(49,	, 56)
6 1	U ⁶ T	7 0	5 1	3 2	1 3	7 4	5 5	3 6	1 7	(57,	, 64)
7 1	U ⁷ T	7 0	6 1	5 2	4 3	3 4	2 5	1 6	0 7	(65,	, 72)
7 2	TU ² T	0 7	7 1	6 3	5 5	4 7	3 1	2 3	1 5	(73,	, 80)
7 3	TU ³ T	0 7	7 2	6 5	5 0	4 3	3 6	2 1	1 4	(81,	, 88)
7 4	TU ⁴ T	0 7	7 3	6 7	5 3	4 7	3 3	2 7	1 3	(89,	, 96)
7 5	TU ⁵ T	0 7	7 4	6 1	5 6	4 3	3 0	2 5	1 2	(97,	, 104)
7 6	TU ⁶ T	0 7	7 5	6 3	5 1	4 7	3 5	2 3	1 1	(105,	, 112)
6 5	UTU ³ T	1 1	7 6	5 3	3 0	1 5	7 2	5 7	3 4	(113,	, 120)
5 4	UTU ⁴ T	1 1	6 5	3 1	0 5	5 1	2 5	7 1	4 5	(121,	, 128)
4 3	UTU ⁵ T	1 1	5 4	1 7	5 2	1 5	5 0	1 3	5 6	(129,	, 136)
3 2	UTU ⁶ T	1 1	4 3	7 5	2 7	5 1	0 3	3 5	6 7	(137,	, 144)
5 3	U ² TU ³ T	6 7	3 2	0 5	5 0	2 3	7 6	4 1	1 4	(145,	, 152)
5 2	U ² TU ⁶ T	2 1	7 3	4 5	1 7	6 1	3 3	0 5	5 7	(153,	, 160)
0 3	U ³ TU ³ T	5 7	5 2	5 5	5 0	5 3	5 6	5 1	5 4	(161,	, 168)
3 3	U ⁴ TU ³ T	4 7	7 2	2 5	5 0	0 3	3 6	6 1	1 4	(169,	, 176)
6 3	U ⁵ TU ³ T	3 7	1 2	7 5	5 0	3 3	1 6	7 1	5 4	(177,	, 184)
3 0	TU ³ TU ³ T	7 3	2 3	5 3	0 3	3 3	6 3	1 3	4 3	(185,	, 192)

Tabelle B8

9) (2,17)	(3, 25)	(4,33)	(5, 41)	(6, 49)	(7, 57)	(8, 65)	
(10,72)	(11, 73)	(12, 81)	(13, 89)	(14, 97)	(15,105)	(16, 18)	
	(19,112)	(20,113)	(21,121)	(22,129)	(23,137)	(24, 26)	
	(27,144)	(28,145)	(29, 91)	(30, 87)	(31,153)	(32, 34)	
	(35,160)	(36,161)	(37 ,123)	(38,119)	(39, 78)	(40, 42)	
	(43, 77)	(44,169)	(45, 93)	(46,151)	(47,109)	(48, 50)	
	(51,108)	(52,177)	(53,125)	(54,167)	(55,141)	(56, 58)	
	(59,140)	(60, 99)	(61, 95)	(62,175)	(63,157)	(64, 66)	
	(67,156)	(68,131)	(69,127)	(70,183)	(71, 74)		
	(75,182)	(76,170)			(79,118)	(80, 82)	
	(83,117)	(84,185)	(85,133)	(86,154)		(88, 90)	
		(92,152)		(94,176)		(96, 98)	
		(100,139)	(101,135)	(102,191)	(103,179)	(104,106)	
	(107,178)			(110,150)	(111,114)		
	(115,149)	(116,186)				(120,122)	
		(124,168)		(126,184)		(128,130)	
		(132,155)		(134,192)		(136,138)	
				(142,166)	(143,146)		
	(147,165)	(148,187)					
				(158,174)	(159,162)		
	(163,173)	(164,188)					
	(171,181)	(172,189)					
		(180,190)					

Tabelle C8

(1, 9) (10, 72) (65, 8)	L_{10}	K_9	K_1
(2, 17) (18, 16) (9, 1)	L_{16}^{-1}	K_2	
(3, 25) (26, 24) (17, 2)	L_{24}^{-1}	K_3	
(4, 33) (34, 32) (25, 3)	L_{32}^{-1}	K_4	
(5, 41) (42, 40) (33, 4)	L_{40}^{-1}	K_5	
(6, 49) (50, 48) (41, 5)	L_{48}^{-1}	K_6	
(7, 57) (58, 56) (49, 6)	L_{56}^{-1}	K_7	
(8, 65) (66, 64) (57, 7)	L_{64}^{-1}	K_8	
(11, 73) (74, 71) (72, 10)	L_{71}^{-1}	L_{10}^{-1}	
(12, 81) (82, 80) (73, 11)	L_{80}^{-1}	K_{10}	
(13, 89) (90, 88) (81, 12)	L_{88}^{-1}	K_{11}	
(14, 97) (98, 96) (89, 13)	L_{96}^{-1}	K_{12}	
(15, 105) (106, 104) (97, 14)	L_{104}^{-1}	K_{13}	
(16, 18) (19, 112) (105, 15)	L_{16}	L_{19}	K_{14}
(20, 113) (114, 111) (112, 19)	L_{111}^{-1}	L_{19}^{-1}	
(21, 121) (122, 120) (113, 20)	L_{120}^{-1}	K_{15}	
(22, 129) (130, 128) (121, 21)	L_{128}^{-1}	K_{16}	
(23, 137) (138, 136) (129, 22)	L_{136}^{-1}	K_{17}	
(24, 26) (27, 144) (137, 23)	L_{24}	L_{27}	K_{18}
(28, 145) (146, 143) (144, 27)	L_{143}^{-1}	L_{27}^{-1}	
(29, 91) (92, 152) (145, 28)	L_{29}	L_{92}	K_{19}
(30, 87) (88, 90) (91, 29)	L_{30}	L_{88}	L_{29}^{-1}
(31, 153) (154, 86) (87, 30)	L_{86}^{-1}	L_{30}^{-1}	
(32, 34) (35, 160) (153, 31)	L_{32}	L_{35}	K_{20}

Tabelle C8 (Fortsetz.)

(36,161) (162,159) (160, 35)
 (37,123) (124,168) (161, 36)
 (38,119) (120,122) (123, 37)
 (39, 78) (79 ,118) (119, 38)
 (40, 42) (43, 77) (78, 39)
 (44,169) (170, 76) (77, 43)
 (45, 93) (94,176) (169, 44)
 (46,151) (152, 92) (93, 45)
 (47,109) (110,150) (151, 46)
 (48, 50) (51,108) (109, 47)
 (52,177) (178,107) (108, 51)
 (53,125) (126,184) (177, 52)
 (54,167) (168,124) (125, 53)
 (55,141) (142,166) (167, 54)
 (56, 58) (59,140) (141, 55)
 (60, 99) (100,139) (140, 59)
 (61, 95) (96, 98) (99, 60)
 (62,175) (176, 94) (95, 61)
 (63,157) (158,174) (175, 62)
 (64, 66) (67,156) (157, 63)
 (68,131) (132,155) (156, 67)
 (69,127) (128,130) (131, 68)
 (70,183) (184,126) (127, 69)
 (71, 74) (75,182) (183, 70)

L_{159}^{-1} L_{35}^{-1}
 L_{37} L_{124} K_{21}
 L_{38} L_{120} L_{37}^{-1}
 L_{39} L_{79} L_{38}^{-1}
 L_{40} L_{43} L_{39}^{-1}
 L_{76}^{-1} L_{43}
 L_{45} L_{94} K_{22}
 L_{46} L_{92}^{-1} L_{45}^{-1}
 L_{47} L_{110} L_{46}^{-1}
 L_{48} L_{51} L_{47}^{-1}
 L_{107}^{-1} L_{51}^{-1}
 L_{53} L_{126} K_{23}
 L_{54} L_{124} L_{53}^{-1}
 L_{55} L_{142} L_{54}^{-1}
 L_{56} L_{59} L_{55}^{-1}
 L_{60} L_{100} L_{59}^{-1}
 L_{61} L_{96} L_{60}^{-1}
 L_{62} L_{94}^{-1} L_{61}^{-1}
 L_{63} L_{158} L_{62}^{-1}
 L_{64} L_{67} L_{63}^{-1}
 L_{68} L_{132} L_{67}^{-1}
 L_{69} L_{128} L_{68}^{-1}
 L_{70} L_{126}^{-1} L_{69}^{-1}
 L_{71} L_{75} L_{70}^{-1}

Tabelle C 8 (Fortsetz)

(76, 170) (171, 181) (182, 75)

(80, 82) (83, 117) (118, 79)

(84, 185) (186, 116) (117, 83)

(85, 133) (134, 192) (185, 84)

(86, 154) (155, 132) (133, 85)

(101, 135) (136, 138) (139, 100)

(102, 191) (192, 134) (135, 101)

(103, 179) (180, 190) (191, 102)

(104, 106) (107, 178) (179, 103)

(111, 114) (115, 149) (150, 110)

(116, 186) (187, 148) (149, 115)

(143, 146) (147, 165) (166, 142)

(148, 187) (188, 164) (165, 147)

(159, 162) (163, 173) (174, 158)

(164, 188) (189, 172) (173, 163)

(172, 189) (190, 180) (181, 171)

 L_{76} L_{171} L_{75}^{-1} L_{80} L_{83} L_{79}^{-1} L_{116}^{-1} L_{83}^{-1} L_{85} L_{134} K_{24} L_{86} L_{132}^{-1} L_{85}^{-1} L_{101} L_{136} L_{100}^{-1} L_{102} L_{134}^{-1} L_{101}^{-1} L_{103} L_{180} L_{102}^{-1} L_{104} L_{107} L_{103}^{-1} L_{111} L_{115} L_{110}^{-1} L_{116} L_{148}^{-1} L_{115}^{-1} L_{143} L_{147} L_{142}^{-1} L_{148} L_{164}^{-1} L_{147}^{-1} L_{159} L_{163} L_{158}^{-1} L_{164} L_{172}^{-1} L_{163}^{-1} L_{172} L_{180}^{-1} L_{171}^{-1}

Literatur

- [1] K.Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie,
Braunschweig 1932
- [2] Klein - Fricke, Elliptische Modulfunktionen Bd.1
Leipzig 1912
- [3] Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen Bd.1
Leipzig 1922
- [4] W.v.Dyck, Gruppentheoretische Studien. Math.Ann.20(1882)
- [5] E.Hecke, Die Riemannschen Periodenrelationen für die
elliptischen Modulfunktionen, Jour.f.Mathem.167(1933)
- [6] H.Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche,(1913)
- [7] Frasc, Die Erzeugenden der Hauptkongruenzgruppen für
Primzahlstufen. Math.Ann.108(1933)
- [8] O.Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen
Abh.Math.Sem.Hamburg 5 (1927)
- [9] W.Hurewicz, Zu einer Arbeit von O.Schreier,
Abh.Math.Sem.Hamburg 8 (1930)
- [10] H.W.Kuhn, Subgroup theorems for groups presented by
generators and relations, Annals of Math. 56(1952)

(Hinweis auf bekannten Sachverhalt)

Eine Grenzkreisgruppe ohne Fixpunkte im Innern des Kreises (bzw. Halbebene) charakterisiert eine Riemannsche Fläche. Umgekehrt läßt sich zu jeder Riemannschen Fläche eine solche charakterisierende Grenzkreisgruppe angeben, die auf einem Kreis (bzw. Halbebene), der Ebene oder der Sphäre wirkt.

Es sei $\mathcal{F}(N)$ die Riemannsche Fläche zur Grenzkreisgruppe $\Gamma(N)$, und es entstehe $\overline{\mathcal{F}(N)}$ daraus durch Kompaktifizieren (jedes Loch einzeln stopfen). Wir wollen eine Grenzkreisgruppe $\overline{\Gamma(N)}$ angeben, die $\overline{\mathcal{F}(N)}$ charakterisiert.

Durch die Zuordnung

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \tilde{U} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \\ T &\longrightarrow \tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & -B \\ \bar{B} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{\pi}{N} + i \sin \frac{\pi}{N} = e^{\frac{i\pi}{N}} \\ \bar{A} &= \cos \frac{\pi}{N} - i \sin \frac{\pi}{N} = e^{-\frac{i\pi}{N}} \\ B &= \cos \frac{\pi}{N} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{N} \\ \bar{B} &= \cos \frac{\pi}{N} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{N} \end{aligned}$$

wird ein Homomorphismus von Γ auf eine diskrete Gruppe $\tilde{\Gamma}$ von linearen Substitutionen beschrieben

$$h|_{\Gamma} \longrightarrow \tilde{\Gamma}$$

Wie man leicht nachweist, besitzt $\tilde{\Gamma}$ die definierenden Relationen

$$E = \tilde{\Gamma}^2 = (\tilde{T}\tilde{U})^3 = \tilde{U}^N.$$

Deshalb ist

$$\overline{\Gamma(N)} = h(\Gamma(N))$$

eine Grenzkreisgruppe der gewünschten Art. Ersetzt man in den Rückkehrschnitten von $\Gamma(N)$ die U, T durch $\tilde{U}, \tilde{T}$ so gewinnt man Erzeugende von $\overline{\Gamma(N)}$.

Lebenslauf

Ich - Christoph W i t z g a l l wurde am 25.II.1929 in Hindelang als Sohn des Arztes Dr. Otto Witzgall und seiner Gemahlin, der Ärztin Dr. Hanna Witzgall, geb. Schulte, geboren. Von 1939 - 47 besuchte ich die Oberschule in Oberstdorf und das Lyceum Alpinum in Zuoz/Schweiz, wo ich die Maturitätsprüfung ablegte.

Meine Universitätszeit begann im Wintersemester 1948/49 an der Philosophisch-Theologischen Hochschule in Passau mit dem Studium der Chemie. Ich wandte mich dann der Mathematik zu und immatrikulierte zum Wintersemester 1949/50 an der Universität München.

Vorlesungen hörte ich in Passau bei den Herren Lammel und Eser, in München bei den Herren Perron, Tietze, König, R.Schmidt, Aumann, Maak, Stein, Seebach, Röhl, Roquette, Sauer (THM), F.L.Bauer (THM), Bopp, Konrad, Wenzl. Besonderen Dank schulde ich meinem verehrten Lehrer Professor Wilhelm Maak.

